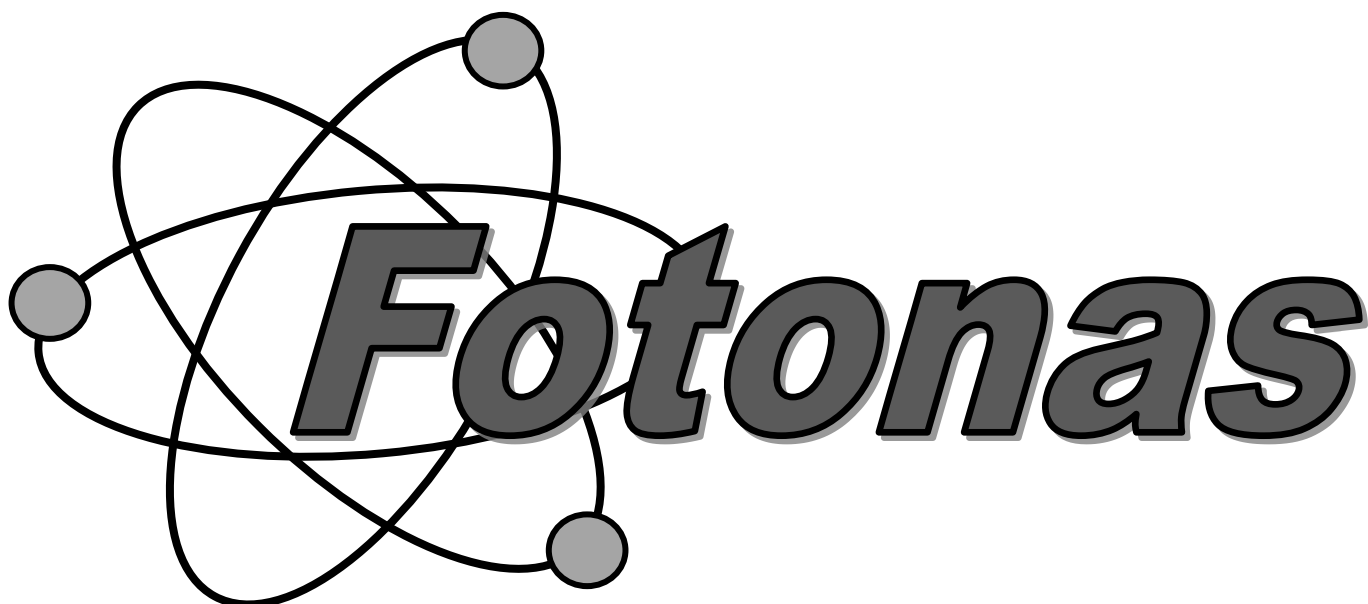


**LIETUVOS FIZIKŲ DRAUGIJA
ŠIAULIŲ UNIVERSITETO
JAUNŲJŲ FIZIKŲ MOKYKLA „FOTONAS“**



KINEMATIKA. DINAMIKA

**LIETUVOS FIZIKŲ DRAUGIJA
ŠIAULIŲ UNIVERSITETO
JAUNŲJŲ FIZIKŲ MOKYKLA „FOTONAS“**

Saulius Pelanskis

KINEMATIKA. DINAMIKA

III KURSO II UŽDUOTYS IR METODINIAI NURODYMAI

**Metodinė priemonė
2017–2018 mokslo metai**

Šiauliai 2017

II TURAS

KINEMATIKA. DINAMIKA

Metodiniai nurodymai

Kinematika

Bendrosios fizikos kurso kinematikos uždaviniuose nagrinėjamas vieno ar keleto materialiujų taškų tolyginis ir tolygiai kintamas tiesiaiegis ir kreiviaiegis judėjimas (dažnai išskiriant judėjimą apskritimu), kietojo kūno sukimasis. Kinematikoje kūnų judėjimas nagrinėjamas neaiškinant judėjimo priežasčių, t. y. nevartojant nei jėgos F , nei masės m sąvokos. Visus kinematikos uždavinius pagal sąlygos reikalavimus galima suskirstyti į 2 grupes:

- 1) rasti bet kurią judėjimo parametą (greitį, pagreitį, ...), kai yra žinomas dėsnis, pagal kurį juda kūnas (tiesioginis uždavinys);
- 2) nustatyti judėjimo dėsnį, žinant kurią nors parametą (atvirkštinis uždavinys).

Kaip spręsti kinematikos uždavinius? Pirmiausia, išnagrinėjus ir sutrumpintai užrašius uždavinio sąlygą, reikia nubraižyti brėžinį. Brėžinyje reikia pažymėti taško judėjimo trajektoriją, greičių ir pagreičių vektorius nurodytais laiko momentais, pažymėti sąlygoje nurodytus laiko intervalus. Po to pasirenkama atskaitos sistema (dažniausiai stačiakampė Dekarto koordinačių sistema). Jeigu nėra specialių nurodymų, koordinačių pradžia susiejama su pradiniu judėjimo tašku, o ašis Ox nukreipiama judėjimo kryptimi. Apskritai koordinačių ašis patogiu nukreipti taip, kad kuo mažiau reikėtų skaidyti vektorius, t. y. kad kuo daugiau vektorių projekcijų būtų lygių nuliui. Pasirinkus atskaitos sistemą, reikia pažymėti visas judančio taško koordinates nurodytais ir ieškomaisiais laiko momentais. Greičių ir pagreičių vektoriai išskaidomi į dedamąsias Ox ir Oy ašyse ir suprojektuojami. Projekcijų ženklai nustatomi taip: jei vektorius sudaro smailųjį kampą su pasirinkta ašimi, tai jo projekcija teigiama, jei bukąjį – projekcija neigiama, jei statųjį – projekcija lygi nuliui (kampas nuskaitomas nuo ašies link vektoriaus prieš laikrodžio rodyklę). Kai ieškomojo vektoriaus projekcija iš anksto nežinoma, vektoriaus kryptis pasirenkama laisvai ir lygtyse jo projekcija užrašoma su ženklu, atitinkančiu pasirinktą kryptį. Jei atsakyme gaunamas teigiamas ženklas, tai vektoriaus dedamoji išilgai ašies nukreipta pasirinkta kryptimi. Neigiamas ženklas rodo, kad pasirinkta vektoriaus kryptis yra priešinga.

Nubraižius brėžinį, koordinačių, greičių ir pagreičių projekcijų kinematinėmis lygtimis susiejami visi naudojami dydžiai, užrašomos papildomos uždavinio sąlygos. Taigi sudaroma kinematinė lygčių sistema. Patikrinus nežinomųjų skaičių (jis turi būti lygus lygčių skaičiui), sistema išsprendžiama ieškomųjų dydžių atžvilgiu, laikantis bendrųjų nurodymų.

Trumpai aptarsime įvairių tipų kinematikos uždavinių sprendimo ypatybes.

- Kai kurių uždavinių sąlygoje duodamas ne vieno, o kelių (dažniausiai dviejų) kūnų tiesiaiegis tolyginis judėjimas atskaitos sistemoje, susietoje su Žeme arba kita kokia nors atskaitos sistema. Šiais atvejais uždavinių sprendimas supaprastėja, jei visus judėjimus nagrinėsime atskaitos sistemoje, susietoje su vienu iš kūnų. Kartais tokios atskaitos sistemos parinkimas būtinas. Reikia prisiminti, kad, jei kūnas A juda

kūno B atžvilgiu greičiu $\vec{v}_1$, tai, remiantis judėjimo reliatyvumu, kūnas B juda greičiu $\vec{v}_2$ kūno A atžvilgiu. Be to,

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2.$$

- Jei materialusis taškas dalyvauja dviejuose judėjimuose, tai jo poslinkis $\Delta\vec{s}$ lygus vektorinei poslinkių kiekviename judėjime sumai nepriklausomai nuo to, ar vienu metu vyko tie judėjimai:

$$\Delta\vec{s} = \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2.$$

Jei judėjimai vyko tuo pačiu metu, tai, padaliję abi lygties puses iš judėjimo laiko Δt , gauname:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

t. y. taško greitis sudėtingame judėjime lygus vektorinei greičių sumai atskiruose judėjimuose.

- Sprendžiant uždavinius, kuriuose nagrinėjamas kūnų judėjimas vertikaliai aukštyn ir žemyn, reikia prisiminti, kad kūnas, tiek judėdamas aukštyn, tiek krisdamas žemyn, juda laisvojo kritimo pagreičiu $\vec{g}$, kurio modulis ir kryptis yra žinoma ($\vec{g}$ vektorius nukreiptas vertikaliai žemyn). Be to, kai nėra oro pasipriešinimo, kūno kilimo iki aukščiausio trajektorijos taško laikas yra lygus kritimo į pradinį tašką laikui ($t_{kil.} = t_{krit.}$), o greičio modulis kritimo pabaigoje lygus pradinio greičio moduliui, tik priešingos šių vektorių kryptys ($\vec{v}_{krit} = -\vec{v}_0$).

- Nagrinėjant kampu į horizontą mestų kūnų judėjimą, atskaitos sistemos pradžią patogiu susieti su išmetimo tašku, ašį Ox nukreipti išilgai Žemės paviršiaus, o ašį Oy statmenai jam. Galioja judėjimų nepriklausomumo principas, pagal kurį šį judėjimą galime nagrinėti kaip dviejų vienašakių judėjimų Ox ir Oy ašimis sumą. Reikia nepamiršti, kad judėjimo laikas Ox ašimi lygus judėjimo laikui Oy ašimi, judėjimo greitis Ox ašimi, kai nėra oro pasipriešinimo, nekinta ir yra lygus pradinio greičio $\vec{v}_0$ dedamajai Ox ašyje, o kūno pagreitis kiekviename trajektorijos taške pastovus ir lygus $\vec{g}$. Taigi, sprendžiant šiuos uždavinius, pirmiausia randamos pradinio greičio dedamosios ašyse Ox ir Oy , po to sudaromos skaliarinės judėjimo lygtys kiekvienai kryptiai.

- Taško judėjimo apskritimu ir kietojo kūno sukimosi aplink nejudančią ašį uždaviniai iš esmės nesiskiria nuo tiesiaegio judėjimo uždavinių. Skirtumas tik tas, kad šiuo atveju, be bendrųjų taško kinematikos lygčių, reikia taikyti ir kampinio greičio, įcentrinio pagreičio bei kampinio poslinkio lygtis.

- Atskiras judėjimo apskritimu atvejis yra dirbtinių Žemės palydovų judėjimas. Sprendžiant šiuos uždavinius, reikia atsiminti, kad skriejantys aplink Žemę arti jos paviršiaus palydovai juda apskritimine orbita. Jų įcentrinis pagreitis lygus laisvojo kritimo pagreičiui ($a_{ic.} = g$), t. y. palydovai laisvai krinta.

- Svarbią vietą užima uždaviniai, kuriuos sprendžiant taikomi grafikai. Šiuo atveju reikia gerai žinoti elementariųjų funkcijų – tiesės, parabolės lygtis, tolygiai, tolygiai kintamai judančio kūno pagreičio, greičio, poslinkio, kelio ir koordinatės lygtis. Svarbu gerai mokėti tirti šių funkcijų grafikus.

Dinamika

Dinamika nagrinėja kūnų judėjimo dėsnius, atsižvelgdama į priežastis, sąlygojančias to judėjimo pobūdį.

Kūno judėjimo greitis kinta (kūnas įgyja pagreitį) arba kūnas deformuojasi, jei šį kūną veikia aplinkiniai kūnai. Šios sąveikos matas yra jėga. Jėga – vektorinis dydis. Ją apibūdina skaitinė vertė, veikimo kryptis ir veikimo taškas.

Šiame ture nagrinėjamas kūnų, į kurių matmenis duotomis sąlygomis galime neatsižvelgti, judėjimas (materialiojo taško judėjimas).

Kai materialųjį tašką veikia keletas jėgų $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, jų veikimą galima pakeisti vienos jėgos $\vec{F}$, kuri yra duotųjų jėgų atstojamoji, veikimu (**superpozicijos principas**):

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i.$$

Be to, galioja jėgų veikimo **nepriklausomumo principas**: jei kūną vienu metu veikia keletas jėgų, tai kiekvienos jėgos poveikį galima nagrinėti nepriklausomai nuo kitų jėgų.

Dinamikos pagrindas – trys Niutono dėsniai, suformuluoti materialiajam taškui, judančiam inercinėse atskaitos sistemose.

Pirmasis Niutono dėsnis. Kai materialųjį tašką veikiančių jėgų atstojamoji lygi nuliui, taškas nejuda arba juda tiesiai ir tolygiai.

Kai

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0, \text{ tai } \vec{v} = \text{const.}$$

Antrasis Niutono dėsnis. Materialiojo taško judesio kiekio pokytis per laiko vienetą lygus tašką veikiančiai jėgai ir nukreiptas išilgai šios jėgos veikimo tiesės:

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F};$$

čia $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ ir $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ – taško judesio kiekiai stebėjimo laikotarpio Δt pradžioje ir pabaigoje, $\vec{F}$ – jėga, veikianti tašką laiko tarpą Δt .

Jei per jėgos veikimo laiką taško masė nekinta $m_1 = m_2 = m$, tai lygtį galima užrašyti taip:

$$\vec{F} = m\vec{a}; \quad (2.1)$$

čia $\vec{a}$ – taško pagreitis.

Tai yra pagrindinė materialiojo taško dinamikos lygtis.

Trečiasis Niutono dėsnis. Du kūnai veikia vienas kitą jėgomis, kurių moduliai lygūs, o kryptys priešingos:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.2)$$

Šios jėgos veikia skirtingus kūnus!

Sprendžiant dinamikos uždavinius patartina vadovautis tokia sprendimo tvarka:

- Nubraižome brėžinį ir pavaizduojame visas kūną veikiančias jėgas. Norint teisingai nustatyti jėgų kryptis, būtina prisiminti, kad sunkio jėga nukreipta vertikaliai į apačią; atramos reakcijos jėga, nesant trinties, statmena besiliečiantiems paviršiams

jų susilietimo taške ir nukreipta kūno kryptimi; siūlo įtempimo jėga nukreipta išilgai siūlo link pakabinimo taško.

- Užrašome antrąjį Niutono dėsnį vektorine forma.
- Jei jėgos veikia ne vienoje tiesėje, tai parenkamos dvi statmenos koordinačių ašys (dvi kryptys) Ox ir Oy , esančios jėgų veikimo plokštumoje.
- Suprojektuojame visas kūną veikiančias jėgas pasirinktose koordinačių ašyse.

Tada užrašome antrąjį Niutono dėsnį dviem skaliarinėmis lygtimis:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x, \\ \sum F_y &= ma_y.\end{aligned}$$

Jei judėjimas tiesiaiegis, tai vieną ašį (Ox) nukreipiame pagreičio kryptimi, o kitą ašį (Oy) – statmenai pagreičio kryptiai. Tada šios lygtys supaprastėja, nes $a_x = a$, $a_y = 0$ ir

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma, \\ \sum F_y &= 0.\end{aligned}$$

Visų projekcijų ženklai nustatomi projekcijų rašymo taisyklėmis.

- Materialiajam taškui tolygiai judant R spindulio apskritimu antrasis Niutono dėsnis

$$\sum F_i = ma_{ic};$$

čia $\sum F_i$ – jėgų projekcijų (apskritimo spindulio kryptimi) suma,

$a_{ic} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$ – įcentrinis taško pagreitis, v – linijinis greitis, ω – kampinis greitis.

- Jei uždavinyje nagrinėjamos surištosios sistemos, tai judėjimo lygtis užrašome kiekvienam kūnui atskirai. Jei reikia, užrašomos kinematinės lygtys, susiejančios atskirų sistemos kūnų judėjimo pagreičius. Kai kūnai surišti nesvariu siūlu, siūlo įtempimas yra vienodas visame siūlo ilgyje.

- Išsprendžiame gautą lygčių sistemą ir gauname galutinį raidinį atsakymą.
- Apskaičiuojame rezultato skaitinę vertę ir išanalizuojame rezultatą.

Pagrindinės formulės:

- Kinematinės materialiojo taško judėjimo lygtys koordinatine forma:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t).\end{aligned}$$

Šios lygtys gali būti pakeistos viena vektorine lygtimi:

$$\vec{s} = \vec{s}(t).$$

- Vidutinis greitis:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}; \quad (2.3)$$

čia $\Delta \vec{s}$ – materialiojo taško poslinkis per laiką Δt .

- Vidutinis judėjimo greitis:

$$v_{vid} = \frac{\Delta \ell}{\Delta t};$$

čia $\Delta \ell$ – taško nueitas kelias per laiką Δt . Bendru atveju $\Delta \ell \geq |\Delta \vec{s}|$, todėl

$$v_{vid} \geq |\vec{v}|.$$

- Vidutinis pagreitis:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t};$$

čia $\Delta \vec{v}$ – taško greičio pokytis per laiką Δt .

- Įcentrinio pagreičio modulis:

$$a_{ic} = \frac{v^2}{R}; \quad (2.4)$$

čia R – trajektorijos kreivumo spindulys nagrinėjamame trajektorijos taške.

• Tiesiaeigio tolyginio judėjimo atveju ($v = \text{const}$, $a = 0$) kinematinė judėjimo lygtis:

$$x = x_0 + vt; \quad (2.5)$$

čia x – taško koordinatė bet kuriuo laiko momentu, x_0 – pradinė koordinatė.

• Tiesiaeigio tolygiai kintamo judėjimo atveju ($a = \text{const}$) kinematinė judėjimo lygtis:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad (2.6)$$

čia v_0 – pradinis judėjimo greitis.

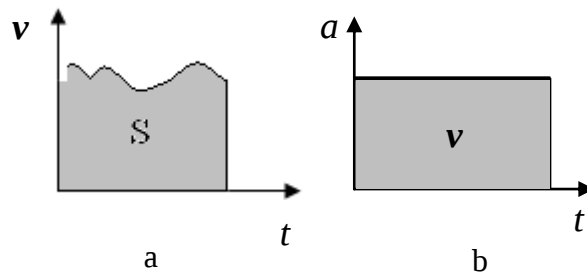
Jei $a > 0$, tai judėjimas tolygiai greitėjantis.

Jei $a < 0$, tai judėjimas tolygiai lėtėjantis.

- Tolygiai kintamo judėjimo atveju taško greitis:

$$v = v_0 + at. \quad (2.7)$$

• Jei žinoma greičio priklausomybė nuo laiko $v = v(t)$, tai kreivės $v = v(t)$ apribotas plotas savo skaitine verte lygus nueitam keliui:



2.1 pav.

• Jei žinoma pagreičio priklausomybė nuo laiko, tai kreivės $a = a(t)$ apribotas plotas savo skaitine verte lygus greičiui.

- Kampinio greičio modulis:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad (2.8)$$

čia T – sukimosi periodas – vieno pilno apsisukimo laikas.

- Sukimosi dažnis:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (2.9)$$

- Ryšys tarp linijinio ir kampinio greičio:

$$v = \omega R. \quad (2.10)$$

- Antrasis Niutono dėsnis pastovios masės materialiajam taškui:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a};$$

čia $\sum \vec{F}$ – tašką veikiančių jėgų atstojamoji, m – taško masė, $\vec{a}$ – taško pagreitis.

- Rimtios trinties jėgos F_{tr} modulis randamas:

$$F_{tr} = \mu N; \quad (2.11)$$

čia μ – rimties trinties koeficientas, būdingas besiliečiančių paviršių porai, N – normalinio slėgimo jėga.

Kai kūno judėjimo greitis mažas, tai pagal šią lygtį apskaičiuojama ir slydimo trinties jėga, nes slydimo trinties koeficientas mažai skiriasi nuo rimties trinties koeficiento.

- Visuotinės traukos dėsnis. Du materialieji taškai (vienalyčiai rutuliai) traukia vienas kitą jėga, tiesiog proporcinga jų masių sandaugai ir atvirkščiai proporcinga atstumo tarp jų (jų centrų) kvadratui:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}; \quad (2.12)$$

čia $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ (N} \cdot \text{m}^2\text{)/kg}^2$ – gravitacijos konstanta.

- Jėga, kuri atsiranda kūnų deformacijos metu ir priešinasi jų formos ir matmenų kitimui, vadinama tamprumo jėga:

$$|F_{tampr}| = k \cdot \Delta x; \quad (2.13)$$

čia k – tamprumo koeficientas (spyruoklės atveju – standumas), Δx – absoliutinis pailgėjimas arba sutrumpėjimas.

- Kiekvieną kūną, esantį skystyje (dujose), veikia išstumiančioji jėga (Archimedo jėga), skaitine verte lygi išstumto skysčio (dujų) svoriui:

$$F_A = \rho_0 g V; \quad (2.14)$$

čia ρ_0 – skysčio (dujų) tankis, V – išstumto skysčio (dujų) tūris, skaitine verte lygus panirusios kūno dalies tūriui.

- Materialiųjų taškų sistemos masių centro koordinatės:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i};$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i};$$

$$z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

- Uždaroje sistemoje masės centras arba juda tiesiai ir tolygiai, arba yra rimtyje.

Uždavinių sprendimo pavyzdžiai

1 pavyzdys

Lėktuvas skrenda uždaru maršrutu tarp miestų A, B, C, esančių lygiakraščio trikampio, kurio kraštinės ilgis ℓ , viršūnėse. Vėjas pučia išilgai kraštinės AB. Lėktuvo greitis oro atžvilgiu v , vėjo greitis u . Kiek laiko lėktuvas sugaiš maršrute A-B-C-A?

t	v
	u
	ℓ

Skridamas uždaru maršrutu lėktuvas sugaiš laiką:

$$t = t_{AB} + t_{BC} + t_{CA}. \quad (1)$$

Lėktuvo greitis išilgai kraštinės AB:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{u},$$

$$v_1 = v + u.$$

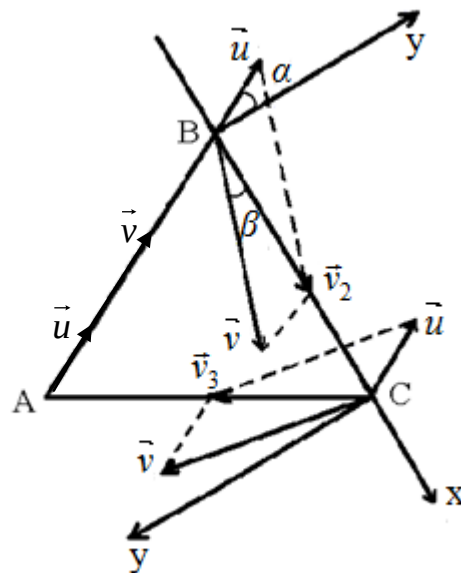
Laikas, sugaištas kelyje AB:

$$t_{AB} = \frac{\ell}{v + u}. \quad (2)$$

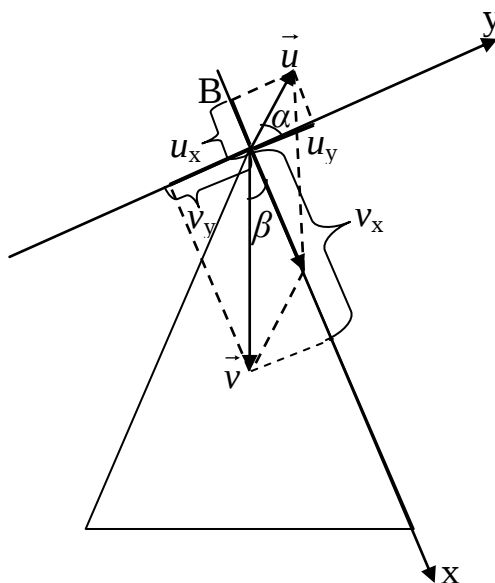
Išilgai kraštinės BC lėktuvas skrenda greičiu $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{u}.$$

Šio vektoriaus kryptis turi būti nukreipta išilgai BC (2.2 pav.). Pasirenkame atskaitos sistemą taip, kad jos pradžia sutaptų su tašku B, o x ašis būtų nukreipta išilgai kraštinės BC, y ašis – statmena BC. Pažymėkime kampą tarp vėjo greičio vektoriaus ir y ašies – α , tarp lėktuvo greičio vektoriaus oro atžvilgiu ir x ašies – β . Greičio $\vec{v}_2$ modulis bus lygus vektorių $\vec{u}$ ir $\vec{v}$ projekcijų sumai x ašyje (2.2 pav. a):



2.2 pav.



2.2 pav. a

$$v_2 = v \cos \beta - u \sin \alpha. \quad (3)$$

Vektorių $\vec{u}$ ir $\vec{v}$ projekcijų suma y ašyje lygi nuliui:

$$u \cos \alpha - v \sin \beta = 0. \quad (4)$$

Kadangi trikampis ABC lygiakraštis, tai akivaizdu, kad $\alpha = 30^\circ$.

(3) ir (4) perrašykime taip:

$$v \cos \beta = v_2 + u \sin \alpha,$$

$$v \sin \beta = u \cos \alpha.$$

Pakėlę abi lygties puses kvadratu, lygtis sudedame. Atsižvelgę, kad $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$, gauname:

$$v_2 = v \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2} \cos^2 \alpha} - u \sin \alpha$$

arba

$$v_2 = \frac{v}{2} \sqrt{4 - 3 \frac{u^2}{v^2}} - \frac{1}{2} u.$$

Laikas, sugaištas kelyje BC:

$$t_{BC} = \frac{2\ell}{v \sqrt{4 - 3 \frac{u^2}{v^2}} - u}. \quad (5)$$

Išilgai kraštinės CA lėktuvas skrenda greičiu $\vec{v}_3$. Šis vektorius nukreiptas išilgai kraštinės CA. Atidėję šį vektorių brėžinyje, matome, kad jo modulis lygus vektoriaus $\vec{v}_2$ moduliui. Todėl

$$t_{CA} = \frac{2\ell}{v \sqrt{4 - 3 \frac{u^2}{v^2}} - u}. \quad (6)$$

(2), (5) ir (6) įrašę į (1), gauname:

$$t = \frac{\ell}{v+u} + \frac{4\ell}{v \sqrt{4 - 3 \frac{u^2}{v^2}} - u}.$$

Atsakymas: $t = \frac{\ell}{v+u} + \frac{4\ell}{v \sqrt{4 - 3 \frac{u^2}{v^2}} - u}.$

2 pavyzdys

Kūnas laisvai krinta be pradinio greičio. Apskaičiuokite kelių, nueitų per pirmąją, antrąją, trečiąją ir t. t. sekundę, santykį.

Atskaitos sistemos pradžią O susiekime su išmetimo tašku, y ašį nukreipkime judėjimo kryptimi.

Kadangi judėjimas tolygiai greitėjantis be pradinio greičio, tai galime parašyti:

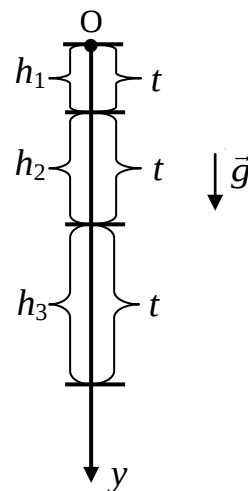
$$h_1 = \frac{gt^2}{2}; \quad (1)$$

čia $t = 1$ s.

Iš brėžinio:

$$h_1 + h_2 = \frac{g t^2}{2}.$$

Atsižvelgę į (1) lygtį, gauname:



2.3 pav.

$$h_2 = \frac{3gt^2}{2}. \quad (2)$$

Toliau galime vėl parašyti:

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{gt^2}{2}.$$

Atsižvelgę į (1) ir (2) lygtis gauname:

$$h_3 = \frac{5gt^2}{2}. \quad (3)$$

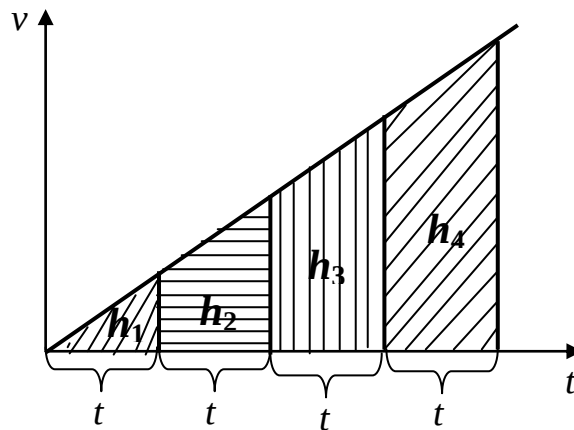
Iš (1), (2), (3) lygčių matyti:

$$h_1 : h_2 : h_3 = 1 : 3 : 5.$$

Kadangi judėjimo sąlygos nesikeičia, tai apibendrinus:

$$h_1 : h_2 : h_3 : \dots : h_n = 1 : 3 : 5 : \dots : (2n + 1).$$

Tą patį rezultatą galime gauti grafiškai. Nubraižome greičio priklausomybės nuo laiko grafiką:



2.4 pav.

Žinodami, kad kreivės $v = v(t)$ plotas savo skaitine verte lygus nueitam keliui, iš grafiko matome, kad apriboto ploto santykis yra:

$$h_1 : h_2 : h_3 : \dots : h_n = 1 : 3 : 5 : \dots : (2n + 1).$$

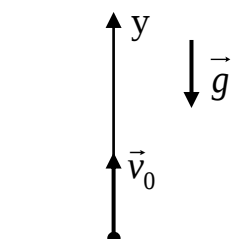
Iš gauto atsakymo matyti, kad toks nueitų kelių santykis bus bet kuriuo atveju, jei tik judėjimas bus tolygiai kintamas be pradinio greičio, o nuosekliai einantys laiko tarpai vienodi.

3 pavyzdys

Kūnas metamas vertikaliai į viršų v_0 pradiniu greičiu. Kokiame aukštyje ir po kiek laiko jo greitis bus n kartų mažesnis, nei pradinis išmetimo greitis?

h	v_0
t	$v = \frac{v_0}{n}$
	g

Vertikaliai aukštyn išmesto kūno judėjimo lygtis



2.7 pav.

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

$$y \text{ kryptimi: } y_1 = H - \frac{gt^2}{2},$$

$$y_2 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Iš čia

$$v_{0y}t = H. \quad (2)$$

t – judėjimo laikas, abiem atvejais vienodas.

Iš brėžinio:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad (3)$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha. \quad (4)$$

(3) ir (4) įrašę atitinkamai į (1) ir (2) bei padaliję gautas lygtis, gauname:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\ell}.$$

Atsakymas: matyti, kad antrojo akmens išmetimo kampas nepriklauso nuo pradinio greičio.

5 pavyzdys

Kamuolys, pradėjęs laisvai kristi be pradinio greičio, nukrinta ant nuožulniosios plokštumos iš $h = 1$ m aukščio ir absoliučiai tampriai du kartus atšoka nuo jos. Atstumas tarp kamuolio smūgio į plokštumą taškų $s = 4$ m. Koks plokštumos pasvirimo kampas α ? Oro pasipriešinimo nepaisykite.

α	$h = 1 \text{ m}$ $s = 4 \text{ m}$
----------	--

Kamuolys, laisvai nukritęs iš h aukščio, įgis greitį:

$$v = gt_1; \quad (1)$$

čia t_1 – judėjimo iš h aukščio laikas.

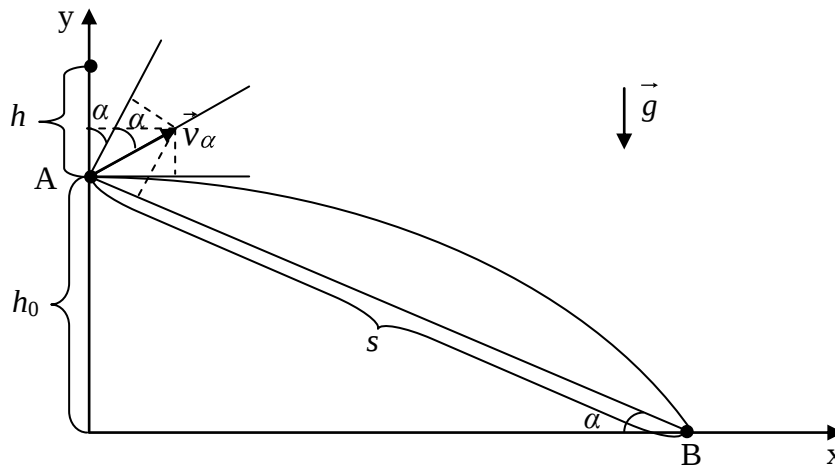
Žinome, kad

$$h = \frac{gt_1^2}{2}. \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) lygčių:

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Braižome brėžinį (2.9 pav.). Tegu kamuolys pirmą kartą į plokštumą atsimuša taške A, antrą – taške B. Kadangi smūgis absoliučiai tamprus, kūnas nuo plokštumos atšoks tokiu pačiu greičiu, ir kritimo į plokštumą kampas α bus lygus atšokimo kampui.



2.9 pav.

Pasirenkame koordinačių ašis.

Judėjimas x kryptimi tiesiaiegis tolyginis, todėl judėjimo lygtis šia kryptimi:

$$x = v_1 t \cos(90^\circ - 2\alpha) = v_0 t \sin 2\alpha. \quad (4)$$

Judėjimas y kryptimi tiesiaiegis tolygiai kintamas pagreičiu $\vec{g}$, todėl judėjimo lygtis šia kryptimi:

$$y = h_0 + v t \cos 2\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Iš brėžinio $h_0 = s \sin \alpha$, dėl

$$y = s \sin \alpha + v t \cos 2\alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (5)$$

Kada kamuolys nukris į tašką B, jo koordinatės bus:

$$\begin{aligned} x &= s \cos \alpha, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Todėl (4) ir (5) lygtis galime perrašyti

$$s \cos \alpha = v t \sin 2\alpha, \quad (6)$$

$$0 = s \sin \alpha + v_0 t \cos 2\alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (7)$$

Iš (6) lygties:

$$t = \frac{s \cos \alpha}{v \sin 2\alpha}. \quad (8)$$

(8) lygtį įrašę į (7), bei atsižvelgę, kad $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, ir

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$$

gauname:

$$\sin \alpha = \frac{s}{4v^2}. \quad (9)$$

Į (9) lygtį įrašome (3)

$$\sin \alpha = \frac{s}{8h};$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

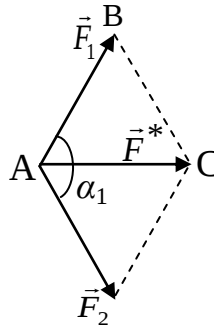
Atsakymas: $\alpha = 30^\circ$.

6 pavyzdys

Kūną veikia dvi vienodo modulio jėgos. Kampas tarp jėgų $\alpha_1 = 120^\circ$. Kiek kartų pasikeis kūno pagreitis, jei tos pačios jėgos sudarys $\alpha_2 = 60^\circ$ kampą?

a_1	$\alpha_1 = 120^\circ$
a_2	$\alpha_2 = 60^\circ$

Pirmuoju atveju:



2.10 pav.

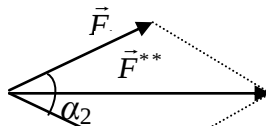
Pagal sąlygą $F_1 = F_2 = F$. Kadangi $\alpha_1 = 120^\circ$, tai $\triangle ABC$ lygiakraštis ir atstojamoji jėga $F^* = F$.

Pagal antrąją Niutono dėsnį:

$$F^* = F = ma_1. \quad (1)$$

$$a_1 = \frac{F}{m}.$$

Antruoju atveju:



Iš brėžinio matyti:

$$F^{**} = 2F \cos \frac{\alpha_2}{2} = 2F \cos 30^\circ;$$

$$F^{**} = 2F \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pagal antrąją Niutono dėsnį:

$$F^{**} = F\sqrt{3} = ma_2, \quad (2)$$

$$a_2 = \frac{F\sqrt{3}}{m}.$$

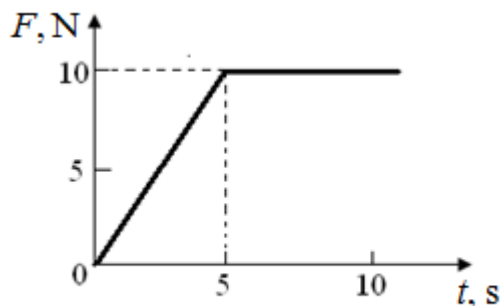
Iš (1) ir (2) lygčių gauname:

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{3}.$$

Atsakymas: $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{3}.$

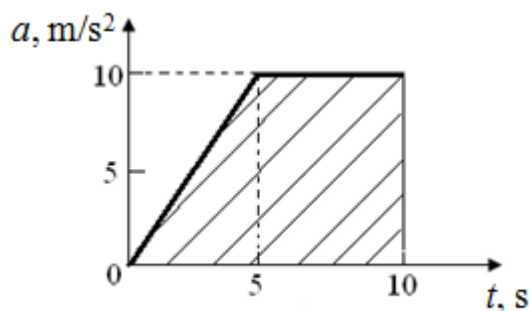
7 pavyzdys

$m = 1$ kg masės kūną veikianti atstojamoji jėga kito, kaip parodyta 2.11 paveikslėlyje. Kokių greičiu judėjo kūnas po 10 s? Pradinis greitis yra lygus nuliui.



2.11 pav.

Pirmąsias 5 judėjimo sekundes kūną veikia didėjanti jėga, todėl pagreitis didėja nuo $a_1 = 0 \text{ m/s}^2$ iki (akivaizdu, kad pagreitis irgi kinta tiesiškai). Po to jėga yra pastovi ir pagreitis nekinta ($a_2 = 10 \text{ m/s}^2$). Nubraižome pagreičio priklausomybės nuo laiko grafiką.



2.12 pav.

Žinome, kad kreivės $a = f(t)$ apribotas plotas savo skaitine verte lygus momentiniam greičiui. Todėl $v = 75 \text{ m/s}$.

Atsakymas: $v = 75 \text{ m/s}$.

8 pavyzdys

Koks laisvojo kritimo pagreitis Saulės paviršiuje? Laisvojo kritimo pagreitis Žemės paviršiuje $g = 10 \text{ m/s}^2$, Saulės spindulys 108 kartus didesnis už Žemės spindulį ir Žemės vidutinis tankis 4 kartus didesnis už Saulės.

g_s	$g_z = 10 \text{ m/s}^2$
	$\frac{R_s}{R_z} = 108$
	$\frac{\rho_z}{\rho_s} = 4$

Žinome, kad laisvojo kritimo pagreitis planetos paviršiuje:

$$g = \frac{GM}{R^2};$$

čia M – planetos masė, R – planetos spindulys, G – gravitacijos konstanta.

$$g_z = \frac{GM_z}{R_z^2},$$

$$g_s = \frac{GM_s}{R_s^2}.$$

Padaliję lygtis gauname:

$$g_s = \frac{M_s}{M_z} \frac{R_z^2}{R_s^2} g_z.$$

Tardami, kad Saulė ir Žemė yra rutulio formos, galime parašyti:

$$M_s = \rho_s V_s = \rho_s \frac{4}{3} \pi R_s^3;$$

$$M_z = \rho_z \frac{4}{3} \pi R_z^3.$$

Todėl

$$g_s = \frac{\rho_s}{\rho_z} \cdot \frac{R_s}{R_z} g_z;$$

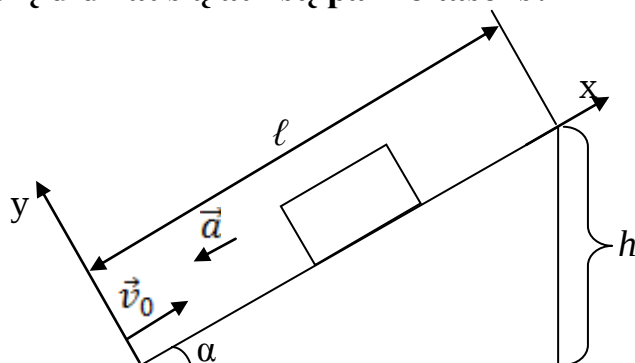
$$g_s = 270 \text{ m/s}^2.$$

Atsakymas: $g_s = 270 \text{ m/s}^2$.

9 pavyzdys

Tašelis pastumiamas nuožulniaja plokštuma į viršų $v_0 = 10 \text{ m/s}$ pradiniu greičiu (2.14 pav.). Plokštumos pasvirimo kampas $\alpha = 45^\circ$. Trinties koeficientas tarp tašelio ir plokštumos $\mu = 0,25$. Į kokį didžiausią aukštį pakilo tašelis?

h	$v_0 = 10 \text{ m/s}$
	$\alpha = 45^\circ$
	$\mu = 0,25$



2.14 pav.

Pastumtas nuožulniaja plokštuma į viršų, tašelis juda tolygiai lėtėdamas pagreičiu a ir, nuslydęs atstumą ℓ , sustoja aukštyje h . Iš brėžinio:

$$h = \ell \sin \alpha. \quad (1)$$

Galime parašyti:

$$\ell = v_0 t - \frac{at^2}{2}. \quad (2)$$

Kadangi tašelis aukštyje h sustoja, tai jo greitis tame taške lygus nuliui. Todėl

$$v_0 = at. \quad (3)$$

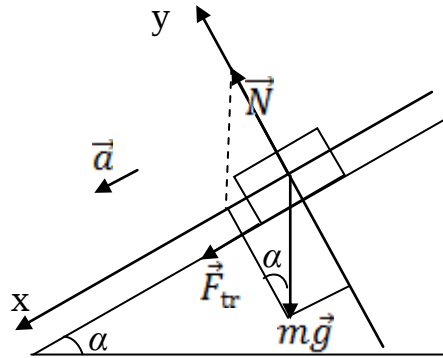
Iš čia

$$t = \frac{v_0}{a}. \quad (4)$$

(4) lygtį įrašę į (2), gauname:

$$\ell = \frac{v_0^2}{2a}. \quad (5)$$

Brėžinyje pažymime tašelį veikiančias jėgas. Tašelį veikia sunkio jėga $m\vec{g}$, atramos reakcijos jėga $\vec{N}$, trinties jėga $\vec{F}_{\text{tr}}$ (2.15 pav.).



2.15 pav.

Pagal II Niutono dėsnį:

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Suprojektuojame jėgas į pasirinktas ašis:

$$x: F_{\text{tr}} + mg \sin \alpha = ma. \quad (6)$$

Žinome, kad

$$F_{\text{tr}} = \mu N. \quad (7)$$

$$y: N - mg \cos \alpha = 0. \quad (8)$$

(7) ir (8) įrašę į (6), gauname:

$$a = g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha). \quad (9)$$

(5) ir (9) lygtis įrašę į (1), gauname:

$$h = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{2g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

Arba

$$h = \frac{v_0^2}{2g(\mu \text{ctg} \alpha + 1)}.$$

Atsižvelgę, kad $\text{ctg} 45^\circ = 1$, gauname:

$$h = \frac{v_0^2}{2g(\mu + 1)}.$$

$$h = 4 \text{ m}.$$

Atsakymas: $h = 4 \text{ m}.$

10 pavyzdys

Pririštas prie siūlo m masės rutuliukas sukasi apskritimu horizontalioje plokštumoje. Rutuliuko apsisukimo periodas T . Apskaičiuokite atstumą nuo rutuliuko pakabinimo taško iki plokštumos, kurioje sukasi rutuliukas.

h	m
	T
	g

Rutuliuką veikia sunkio jėga $m\vec{g}$ ir siūlo įtempimo jėga $\vec{T}$.

Tarkim siūlas su vertikale sudaro α kampą. Užrašome II Niutono dėsnį:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}_{ic}.$$

Suprojektuojame jėgas į pasirinktas x ir y ašis:

$$x: T \sin \alpha = m \frac{v^2}{R},$$

$$y: T \cos \alpha = mg.$$

Padaliję lygtis, gauname:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gR}. \quad (3)$$

Rutuliuko linijinis greitis:

$$v = \frac{2\pi R}{T}; \quad (4)$$

čia R – apskritimo, kuriuo juda rutuliukas, spindulys.

(4) lygtį įrašę į (3), gauname:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\pi^2 R}{gT^2}. \quad (5)$$

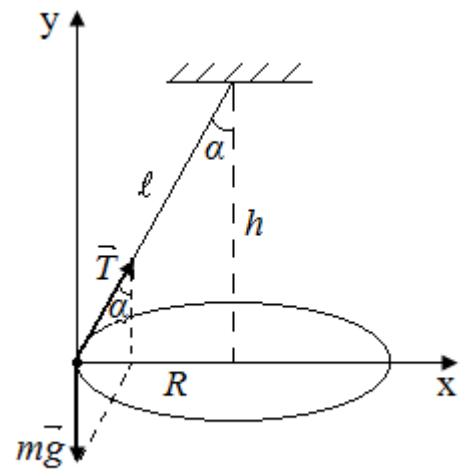
Iš brėžinio

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h}. \quad (6)$$

Sulyginę (5) ir (6) lygtis ir išreiškę h gauname:

$$h = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

Atsakymas: $h = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$



2.16 pav.
(1)

II TURO UŽDUOTYS

1. Plaukikas perplaukia upę per trumpiausią laiką t_1 . Plaukdamas trumpiausiu atstumu jis sugaišta laiką t_2 . Plaukiko greitis vandens atžvilgiu v . Koks upės tėkmės greitis u ?

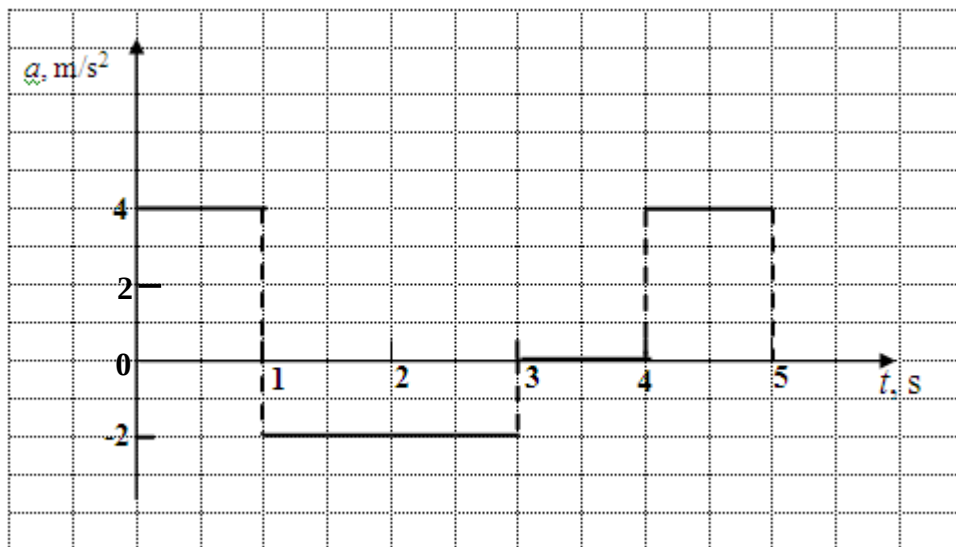
2. Kūnas juda tiesė tolygiai greitėdamas. Per laiką $t = 10$ s jis nueina $s = 60$ m kelią. Per šį laiką kūno greitis pakinta 3 kartus. Koks buvo pradinis kūno greitis? Uždavinį išspręskite grafiškai.

3. Kūnas, paleistas laisvai kristi be pradinio greičio, iš kažkokio tai aukščio nukrinta per laiką t_1 . Per kiek laiko jis nukris iš n kartų didesnio aukščio?

4. Pirmąjį devintadalį kelio, iš rmties būsenos pradėjęs greitėti $a = 2 \text{ m/s}^2$ pagreičiu, automobilis nuvažiavo per laiką $t = 3$ s. Koks buvo automobilio greitis nuvažiavus visą kelią?

5. Kūnas metamas vertikaliai žemyn pradiniu greičiu. Po laiko $t = 2$ s kūno greitis pasidarė $n = 4$ kartus didesnis, nei pradinis greitis. Kiek kartų kūno greitis bus didesnis už pradinį greitį po laiko $t_1 = 4$ s nuo judėjimo pradžios? Oro pasipriešinimo nepaisykite.

6. Kūnas pradeda judėti be pradinio greičio iš koordinačių pradžios. Pagreičio projekcijos priklausomybės nuo laiko grafikas pateiktas 2.17 pav. Koks kūno nueitas kelias per penkias judėjimo sekundes?



2. 17 pav.

7. Vertikaliai aukštyn mestas kūnas pakilo į $H = 12$ m aukštį. Kokiam aukštyje h , virš Žemės paviršiaus, jo greitis buvo perpus mažesnis, nei pradinis greitis?

8. Kūnas pradeda judėti horizontalia plokštuma tiesia trajektorija pastoviu pagreičiu a . Praėjus laikui t_1 , nuo judėjimo pradžios, pagreičio kryptis keičiasi į

priešingą, bet lieka tokio pat dydžio. Koks bus kūno greitis, kai jis grįš į pradinę padėtį?

9. Kūnas metamas vertikaliai žemyn $v_0 = 5$ m/s pradiniu greičiu. Per paskutiniąsias dvi judėjimo sekundes kūnas nulėkė atstumą dvigubai didesnį, nei prieš tai buvusias dvi judėjimo sekundes. Iš kokio aukščio H krito kūnas? Nubraižykite greičio priklausomybės nuo laiko grafiką. Oro pasipriešinimo nepaisykite.

10. Kampu į horizontą mesto kūno greitis aukščiausiam trajektorijos taške 2 kartus mažesnis nei pradinis greitis. Kokiu kampu buvo išmestas kūnas?

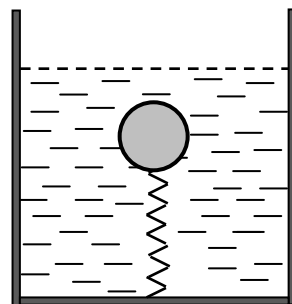
11. m masės kūną veikia dvi jėgos, kurių moduliai F , o kryptys sudaro 120° kampą. Kokiu pagreičiu juda kūnas?

12. $m = 2,3$ kg masės kūnas juda tiese pastoviu $v_0 = 14$ m/s greičiu. Kūną pradeda veikti pastovi $F = 8$ N dydžio jėga, nukreipta statmenai judėjimo kryptiai. Koks kūno greitis po laiko $t = 6$ s?

13. Kūnas nutolęs nuo Žemės paviršiaus atstumu nR ; čia R – Žemės spindulys, n – skaičius. Koks laisvojo kritimo pagreitis g šiame aukštyje? Laisvojo kritimo pagreitis Žemės paviršiuje g_0 .

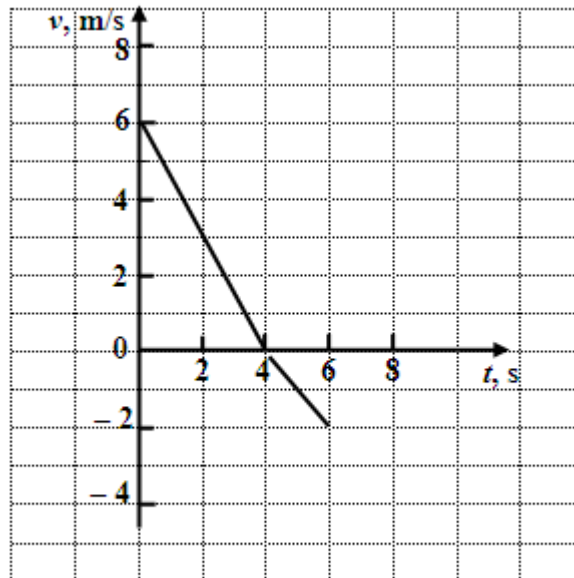
14. Du vienodi kūnai yra ant ilgos nuožulniosios plokštumos priešingų galų. Abu kūnai tuo pačiu metu pastumiami vienodu pradiniu greičiu – pirmasis aukštyn, antrasis žemyn. Koks bus abiejų kūnų nueitų kelių santykis tuo laiko momentu, kai pirmasis kūnas sustos? Trinties nėra.

15. $\rho = 800$ kg/m³ tankio, $V = 10^{-2}$ m³ tūrio medinis rutulys visas paniręs po vandeniu. Vandens tankis $\rho_0 = 1000$ kg/m³. Rutuliui į paviršių neleidžia išplaukti $k = 200$ N/m standumo spyruoklė, kurios kitas galas pritvirtintas prie dugno (2. 18 pav.). Koks yra spyruoklės pailgėjimas $\Delta\ell$? Spyruoklės masė ir tūris, lyginant su rutulio, yra maži.



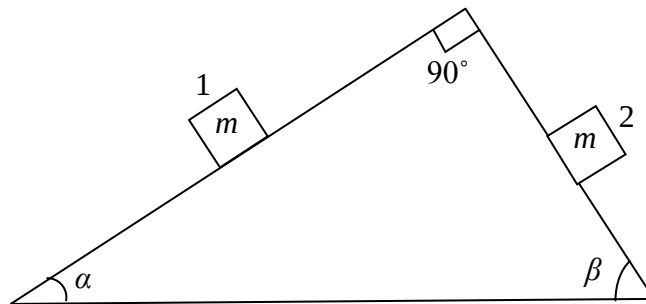
2.18 pav.

16. Kūnas pastumiamas nuožulniaja plokštuma į viršų. Greičio priklausomybės nuo laiko grafikas pateiktas 2.19 paveiksle. Apskaičiuokite nuožulniosios plokštumos pasvirimo kampą.



2.19 pav.

17. Ant glotnaus (nėra trinties) horizontalaus stalo padėtas pleištas. Viršūnės kampas lygus 90° , kampai prie pagrindo lygūs α ir β . Nuo šoninių sienų be trinties slysta du vienodos masės kroviniai (2.20 pav.). Ar judės pleištas? Paašškinkite.



2.20 pav.

18. m masės krovinys sveriamas spyruokliniu dinamometru. Koks krovinio svoris? (Archimedo jėgos ore nepaisykite.) Dinamometras pradėdamas sukti taip, kad krovinys juda horizontalioje plokštumoje v greičiu, R spindulio apskritimu. Kokią vertę dabar rodo dinamometras?

19. Norint užtempti $m = 100$ kg masės krovinį pastoviu greičiu nuožulniaja plokštuma, kurios pasvirimo kampas $\alpha = 30^\circ$, į viršų, jį reikia veikti $F = 600$ N jėga, nukreipta išilgai plokštumos. Koku pagreičiu a slys į apačią paleistas kūnas?

20. Kūnas, pritvirtintas prie ℓ ilgio siūlo, sukasi horizontalioje plokštumoje r spindulio apskritimu (kūginė svyruoklė). Koku pastoviu v greičiu sukasi kūnas?

Lietuvos fizikų draugija
Šiaulių universiteto
jaunųjų fizikų mokykla „FOTONAS“

Saulius Pelanskis
III kurso II turo užduotys ir metodiniai nurodymai
2017–2018 mokslo metai
